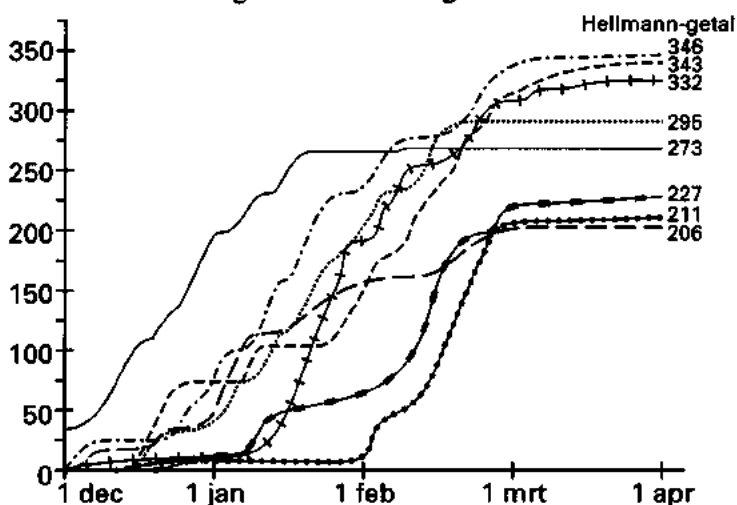


Opgave 1 Winter

Om te zien of een winter 'kouder' is geweest dan een andere wordt gelet op de waargenomen temperaturen in de periode van 1 november tot en met 31 maart. Voor het berekenen van het zogenaamde *Hellmann-getal* van een winter let men op de gemiddelde dagtemperatuur. Dagen waarvoor dit gemiddelde 0°C of hoger is, leveren geen bijdrage. Alleen dagen met een gemiddelde onder nul tellen mee. Is het gemiddelde bijvoorbeeld $-3,8^{\circ}\text{C}$, dan levert die dag een bijdrage van 3,8 aan het Hellmann-getal. Van zo'n gemiddelde dagtemperatuur wordt dus het minteken weggelaten. De zo verkregen positieve bijdragen worden bij elkaar opgeteld. Het eindresultaat is het Hellmann-getal.

In figuur 1 is voor de acht koudste winters uit de periode 1890-1984 in beeld gebracht hoe het Hellmann-getal tot stand is gekomen.

figuur 1



Tot deze acht koudste winters behoren de winters 1890-1891, 1941-1942 en 1955-1956.

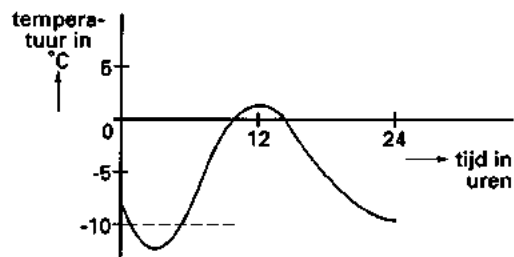
- 3 p 1 □ Noem de Hellmann-getallen van deze drie winters. Gebruik daarvoor figuur 1 en de volgende teksten:
- . Een heel bijzondere winter was die van 1890-1891. De strenge kou viel toen vooral in de decembermaand.
 - . Opvallend laat beginnend en toch één van de drie koudste winters is die van 1941-1942, de barre oorlogswinter.
 - . Verscheidene winters barsten pas in februari goed los. Een voorbeeld daarvan is de winter van 1928-1929 en in nog extremere mate die van 1955-1956. In die laatste winter was er buiten de februari maand van vorst nauwelijks sprake.

Voor het onderling vergelijken van winters gebruiken weerkundigen ook het zogenaamde *vorstgetal* van een winter. Bij de berekening van dit vorstgetal let men echter niet op de gemiddelde dagtemperatuur. In plaats daarvan gaat men voor elke dag in de periode van 1 november tot en met 31 maart het volgende na:

- . was de minimumtemperatuur lager dan 0°C ?
zo ja, dan wordt deze dag als *vorstdag* geteld;
- . was de temperatuur de gehele dag lager dan 0°C ?
zo ja, dan wordt deze dag als *ijsdag* geteld;
- . was de minimumtemperatuur -10°C of lager?
zo ja, dan wordt deze dag als *zeer koude dag* geteld.

Een vorstdag kan dus ook nog geteld worden als een *ijsdag* en/of als een *zeer koude dag*. Wat dit betreft zijn er vier mogelijkheden. Figuur 2 geeft het temperatuurverloop bij een van deze mogelijkheden, een vorstdag die ook geteld wordt als een zeer koude dag, maar *niet* als een ijsdag.

figuur 2



- 6 p 2 Noem de drie andere mogelijkheden en geef in figuren weer hoe het temperatuurverloop bij elk van deze mogelijkheden zou kunnen zijn.

Na afloop van een winter is het aantal vorstdagen (v), het aantal ijsdagen (y) en het aantal zeer koude dagen (z) bekend. Het vorstgetal (F) wordt dan berekend met de formule:

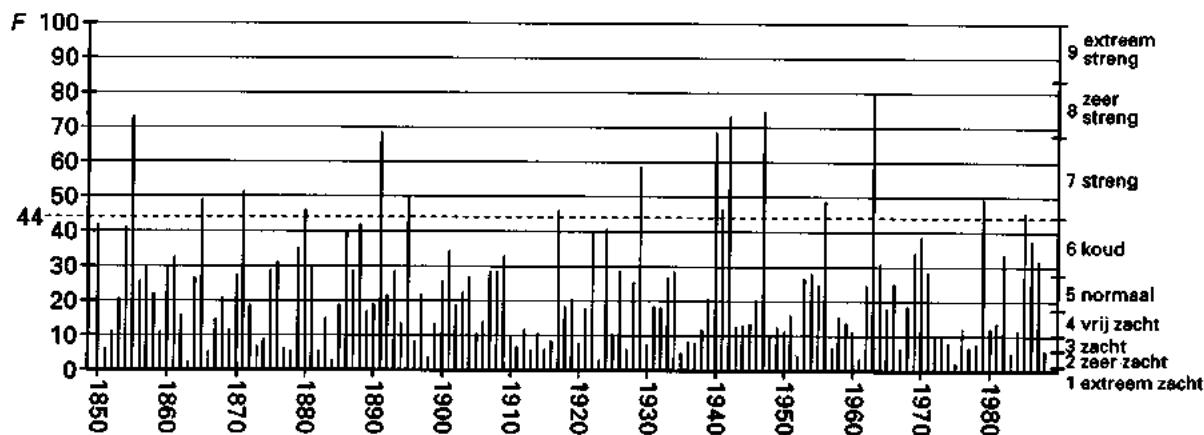
$$F = 0,00275v^2 + 0,667y + 1,111z$$

Het is mogelijk dat een dag een bijdrage van meer dan 1 levert bij de berekening van F , terwijl die dag geen bijdrage levert aan het Hellmann-getal.

- 3 p 3 Wat is er met zo'n dag aan de hand? Licht het antwoord toe.

Figuur 3 laat zien welke waarden men voor het vorstgetal heeft gevonden voor winters in de periode van 1850 tot en met 1988. Met de winter van 1850 bedoelt men de winter van 1849-1850, enzovoort.

figuur 3



- 3 p 4 Bereken met behulp van figuur 3 de relatieve frequentie van de winters in de periode van 1850 tot en met 1988 waarvoor geldt $F > 44$.

Aan de hand van het vorstgetal deelt men de winters in 9 klassen in, van 'extreem zacht' tot 'extreem streng'. Zo geldt bijvoorbeeld dat een winter in de klasse 'streng' wordt ingedeeld als $44 < F \leq 68$.

Bij een zekere winter in de klasse 'streng' telde men 70 vorstdagen en 37 ijsdagen.

- 4 p 5 Bereken het kleinste en het grootste aantal zeer koude dagen dat deze winter gehad kan hebben.

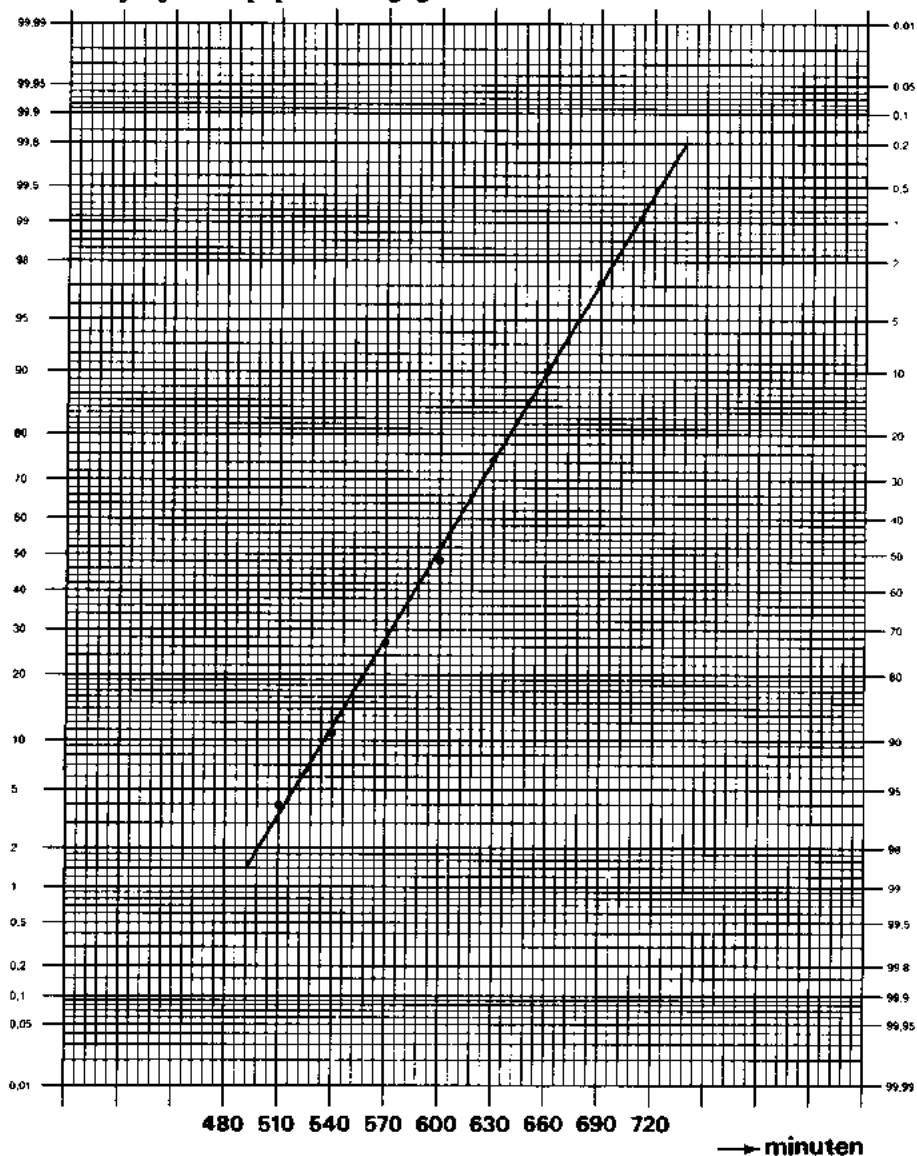
Een zekere winter valt in de klasse 'streng'.

- 4 p 6 Bereken hoeveel vorstdagen deze winter minimaal gehad moet hebben.

Opgave 2 Batterijen

De researchafdeling van een fabriek heeft een nieuw type batterij ontwikkeld, dat bijzonder geschikt is voor het aandrijven van speelgoedmotortjes. In de fabriek wordt de eerste dagen de productie nauwgezet gecontroleerd. Daarbij let men vooral op de levensduur van de batterijen bij aanhoudende belasting. Uit de totale productie van de eerste dag heeft men aselect 250 batterijen genomen en aan een duurproef onderworpen. Het aantal 'lege' batterijen is geregistreerd na perioden van steeds 30 minuten. De ervaring leert dat de levensduur van de batterijen uit een dagproductie vrijwel normaal verdeeld is. Daarom zijn de resultaten van de duurproef in figuur 4 op normaal-waarschijnlijkheidspapier weergegeven.

figuur 4



- 4 p 7 □ Geef met behulp van figuur 4 een schatting van het percentage batterijen van de gehele dagproductie waarvoor de levensduur tussen $8\frac{3}{4}$ uur en 11 uur lag. Licht het antwoord toe.

Eindexamen wiskunde A vwo 1994-I

Neem aan dat voor elke produktiedag geldt: de levensduur van de die dag geproduceerde batterijen is normaal verdeeld met een standaarddeviatie van 50 minuten. Het gemiddelde (μ) in minuten is afhankelijk van een aantal factoren in het fabricageproces.

Omdat de fabrikant in reclameboodschappen beweert dat zijn batterijen erg lang meegaan, wil hij er voor zorgen dat hoogstens 7% van de batterijen uit een dagproductie een levensduur heeft van minder dan $8\frac{1}{2}$ uur.

- 4 p 8 Bereken in minuten nauwkeurig de kleinste waarde van μ waarvoor dit nog het geval is.

Om de levensduur van de batterijen te controleren wordt elke dag een aselechte steekproef van 40 stuks uit de dagproductie genomen. Een controleur onderwerpt deze 40 exemplaren aan een duurproef. Hij laat het fabricageproces aan het begin van de volgende dag al bijstellen als de gemiddelde levensduur van deze batterijen minder is dan 592 minuten.

Stel dat de levensduur van de op een bepaalde dag geproduceerde batterijen normaal verdeeld is met een gemiddelde van slechts 582 minuten en een standaarddeviatie van 50 minuten.

- 7 p 9 Bereken in gehele procenten nauwkeurig de kans dat de controleur het fabricageproces aan het begin van de volgende dag toch niet laat bijstellen.

De controleur merkt dat bij het wisselen van een serie batterijen per ongeluk twee nieuwe batterijen bij een groepje van tien lege terecht zijn gekomen. Omdat aan de buitenkant niet zichtbaar is welke de nieuwe zijn, zit er niets anders op dan de batterijen één voor één door te meten totdat de twee nieuwe zijn teruggevonden.

- 6 p 10 Bereken de kans dat hij in totaal vier van de twaalf batterijen moet doormeten.

■ Opgave 3 Chaparral-vegetatie

In de overgangszone tussen het woestijnklimaat en het gematigde klimaat aan de westkust van Noord-Amerika treft men over een oppervlakte van ongeveer 2000 km² een vegetatie aan van groenblijvende struiken. Men spreekt daar over de Chaparral. De brandbaarheid van de planten is sterk afhankelijk van de leeftijd. Vanwege het vele dorre materiaal zijn vooral de oudere planten zeer brandbaar. Brand heeft naast het gevaar voor mens en dier ook een belangrijke nuttige functie: op de plaats van de verbrande struiken komen vrijwel direct jonge en levenskrachtige planten uit de grond. Spontane branden worden daarom niet altijd geblust. De verjonging zorgt er immers voor dat er geen grote, uitgestrekte gebieden ontstaan van dor materiaal die bij brand tot catastrofes zouden kunnen leiden.

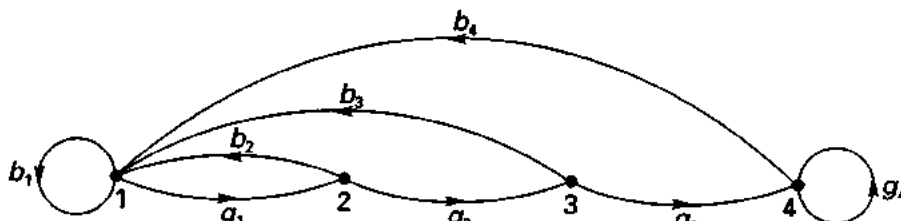
Van deze situatie wordt een model gemaakt, waarbij men de volgende uitgangspunten hanteert.

- . De vegetatie wordt op grond van de leeftijd onderverdeeld in vier klassen:

klasse 1	0 tot 10 jaar
klasse 2	10 tot 20 jaar
klasse 3	20 tot 30 jaar
klasse 4	30 jaar en ouder
- . Als maat voor de omvang van een klasse neemt men niet het aantal planten maar de oppervlakte van het door die klasse bedekte gebied.
- . Per klasse blijft het percentage dat elke 10 jaar verbrandt, constant.
- . De totale oppervlakte van het gebied blijft 2000 km².

Bij dit model kan de volgende graaf getekend worden:

graaf



met b_i = het gedeelte van klasse i dat verbrandt ($b_i < 1$) en
 met g_i = het gedeelte van klasse i dat niet verbrandt ($g_i < 1$).

Bij deze graaf kan een overgangsmatrix M worden opgesteld, waarin b_i en g_i voorkomen.

6 p 11 □ Stel deze matrix M op in de vorm:

van

naar $\left(\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right)$

Eindexamen wiskunde A vwo 1994-I

In tabel 1 staat vermeld hoe groot de oppervlakte is die elke klasse bedekt op het tijdstip $t = 0$ en op het tijdstip $t = 1$ (10 jaar later).

Oppervlakten in km ²		
klasse	op $t=0$	op $t=1$
1	302	462
2	284	300
3	314	278
4	1100	960

6 p 12 □ Bereken g_1 , g_2 , b_1 en b_2 in drie decimalen nauwkeurig.

Van de matrix M zijn met de computer de machten M^2 , M^3 , M^4 , ... uitgerekend. Men constateerde dat de matrices M^n vanaf een zekere waarde van n nauwelijks meer verschillen. Zo zijn, na afronding op twee decimalen, de matrices M^n voor $n > 20$ allemaal gelijk aan de volgende overgangsmatrix:

$$\text{naar } \begin{matrix} & & & \text{van} & & & & & \\ & & & 1 & 2 & 3 & 4 & & \\ & & & \left(\begin{array}{cccc} 0,19 & 0,19 & 0,19 & 0,19 \\ 0,19 & 0,19 & 0,19 & 0,19 \\ 0,18 & 0,18 & 0,18 & 0,18 \\ 0,44 & 0,44 & 0,44 & 0,44 \end{array} \right) & & & & & \end{matrix}$$

Het blijkt dat op elke rij de getallen gelijk zijn.

3 p 13 □ Welke conclusies kan men uit dit alles trekken voor de samenstelling van de Chaparral-vegetatie?

In de praktijk passen de beheerders van de Chaparral ook nog gecontroleerde bewuste afbranding van gedeeltes van de vegetatie ouder dan 10 jaar toe.

In ons model nemen we ter vereenvoudiging aan dat dit *direct na* elke periode van 10 jaar in één moment plaats vindt.

Neem aan dat men steeds

2,5% van klasse 2,

1,3% van klasse 3 en

7,2% van klasse 4 verbrandt.

Dit proces van bewuste afbranding kan weergegeven worden door een vier-bij-vier matrix B , waarin de hierboven genoemde percentages zijn verwerkt.

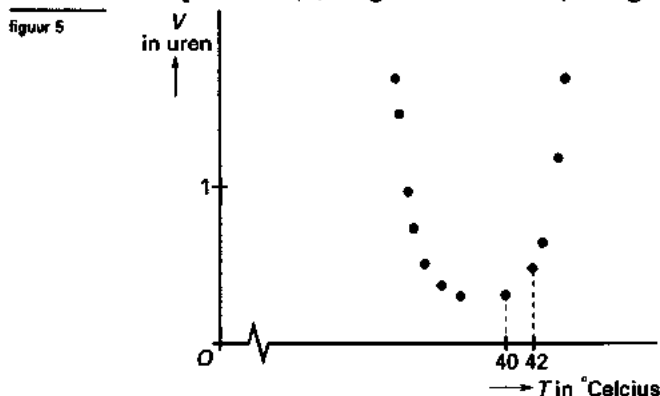
Met behulp van het matrixproduct $B \cdot M$ kan dan het gezamenlijke proces over 10 jaar van de spontane afbranding, gevolgd door de gecontroleerde bewuste afbranding, beschreven worden.

6 p 14 □ Stel matrix B op.

Opgave 4 Colibacteriën

Bij het verteren van voedsel spelen colibacteriën een belangrijke rol. Zij komen voor in de darmen. In laboratoria wordt veel onderzoek gedaan naar de groei van populaties van colibacteriën. Daarbij gebruikt men een kweekvloeistof waarmee men de omstandigheden zoals die in de darmen voorkomen, zoveel mogelijk nabootst.

Bij constante temperatuur blijken deze populaties exponentieel te groeien. Men meet de verdubbelingstijd (V), dat is de tijd in uren die het experiment moet duren om twee keer zo veel bacteriën te krijgen. Uit waarnemingen blijkt dat V afhangt van de ingestelde temperatuur (T) in graden Celsius (zie figuur 5).



- 5 p 15 Is de groei van de populatie bij 42°C sterker dan de groei bij 40°C ? Licht het antwoord toe met behulp van figuur 5.

Binnen het temperatuurgebied waarin de waarnemingen zijn gedaan, blijkt men het verband tussen T en V redelijk te kunnen benaderen met de formule:

$$V = \frac{16,9}{-T^2 + 75T - 1350}$$

- 5 p 16 Bereken bij welke temperatuur de groei volgens de formule het sterkst is.

Bij een experiment voegde men aan de kweekvloeistof een chemisch middel toe om na te gaan of de groei daardoor sterk zou afnemen.

Men begon met 242 bacteriën. De temperatuur was constant 35°Celsius .

Na een uur telde men 1547 bacteriën.

- 7 p 17 Onderzoek of dit aantal meer dan 10% afwijkt van het aantal dat zonder gebruik van een chemisch middel volgens de formule verwacht had mogen worden.

Soms raakt drinkwater door menselijke of dierlijke afvalstoffen besmet met colibacteriën. Omdat het drinken van zulk besmet water uiterst gevaarlijk is, zal een drinkwaterbedrijf in zo'n geval het water extra gaan zuiveren.

In het geval er bij het begin van de extra zuivering per liter water 1800 colibacteriën zijn, geldt de formule:

$$N(t) = 1800 \cdot e^{-0,15t}$$

Hierbij is $N(t)$ het aantal colibacteriën per liter water na t uren.

- 5 p 18 Bereken de groeisnelheid $N'(t)$ op het moment dat $t = 2$.

Zodra het aantal colibacteriën met 99% is afgenomen, stopt men de extra zuivering.

- 5 p 19 Bereken in uren nauwkeurig hoe lang de extra zuivering zal duren.