Opgave 1 Vliegen

Bij een practicumopdracht heeft een biologiestudent in een experiment de groei onderzocht van een populatie van een speciale vliegensoort. Tijdens het gehele experiment gebruikte hij een mengsel van rijpe vruchten als voedingsbodem.

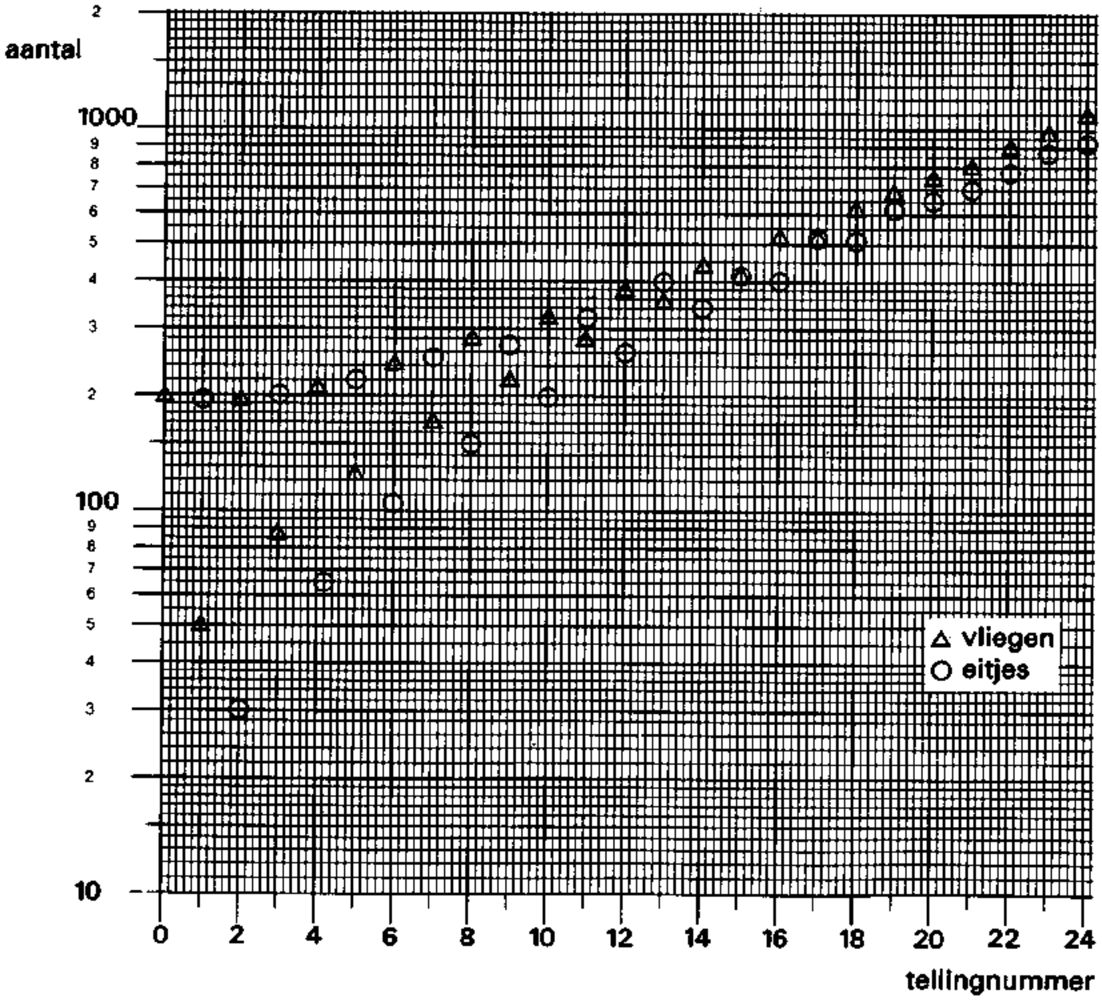
Van de levenscyclus van deze vliegensoort is bekend:

- vrijwel na precies één week komt uit elk eitje één vlieg;
- elke vlieg gaat binnen twee weken dood;
- zowel jonge vliegen (jonger dan één week) als oude vliegen (ouder dan één week) leggen eitjes.

De student startte het experiment met een populatie van 200 vliegen en geen eitjes. Het experiment duurde 24 weken. Met tussentijden van een week telde hij het aantal (levende) vliegen en het aantal eitjes.

In figuur 1 zijn de resultaten van het experiment op enkellogaritmisch papier weergegeven.

figuur 1



1 ☐ Bij welke tellingen lag het aantal eitjes tussen 300 en 500?

Vanaf telling 18 liggen de punten van de grafiek van de vliegen vrijwel op de rechte lijn door (18, 640) en (24, 1120).

2 ☐ Bereken hiermee het percentage waarmee het aantal vliegen in de laatste zes weken gemiddeld *per week* groeide.

Voor het practicumverslag moet de student op grond van de resultaten een populatievoorspellingsmatrix opstellen.
Uit eerdere onderzoeken is reeds bekend geworden dat de overlevingskansen van de jonge vliegen en de vruchtbaarheidscijfers bij deze soort vrijwel uitsluitend afhangen van de gebruikte voedingsbodem.
Algemeen gaat men uit van de populatievoorspellingsmatrix (V):

$$\begin{array}{l c} & \begin{array}{ccc} \text{eitje} & \text{jonge vlieg} & \text{oude vlieg} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{eitje} \\ \text{jonge vlieg} \\ \text{oude vlieg} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 7k & 4k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2k & 0 \end{pmatrix} = V \end{array}$$

Hierbij is de tijdseenheid gelijk aan één week en hangt de waarde van k af van de gebruikte voedingsbodem.

3 ☐ Leg uit hoe uit de matrix afgeleid kan worden dat $k \leqq 0{,}5$.

Voor het berekenen van k let de student op de aantallen bij de laatste tellingen (zie tabel 1).

tabel 1

telling	aantal eitjes	aantal vliegen
22	773	926
23	887	994
24	944	1119

Uit tabel 1 leidt de student met behulp van de matrix V af dat 773 van de 994 vliegen bij telling 23 tot de categorie 'jong' gerekend moeten worden.

4 ☐ Leg uit hoe deze conclusie getrokken kan worden.

5 ☐ Onderzoek of k zo gekozen kan worden dat de aantallen bij telling 24 bij benadering voorspeld kunnen worden aan de hand van de bijbehorende matrix V en de aantallen bij telling 23.

Opgave 2 Pasen

Paaszondag is een christelijke feestdag waarvan de datum afhangt van de onderlinge stand van zon, aarde en maan.

Zowel in het voorjaar als in het najaar staat de zon één keer recht boven de evenaar. Deze momenten noemt men lenteëvening en herfstevening. Ze markeren het begin van de lente en de herfst.
De werkelijke jaarlengte is de tijdsduur tussen twee opeenvolgende lenteëveningen, te weten 365,2422 dagen.

Eeuwenlang gold voor grote delen van Europa de Juliaanse tijdrekening. Deze was gebaseerd op een kalenderjaar van 365 dagen, waarbij aan elk vierde jaar een extra dag werd toegevoegd (schrikkeldag). Ten opzichte van een op de werkelijke jaarlengte gebaseerde tijdrekening ging deze tijdrekening op den duur meerdere dagen verschillen.

6 □ Bereken hoe groot dit verschil ongeveer was na 900 jaar.

In 325 na Christus, toen de lenteëvening op 21 maart viel, nam de katholieke kerk voor de datumbepaling van Paaszondag het volgende besluit:

Paaszondag is de eerste zondag na de eerste volle maan die op of na 21 maart valt.

Omdat nog eeuwenlang daarna de Juliaanse tijdrekening werd gehanteerd, schoof de paasdatum langzaam maar zeker verder het jaar in. In 1582 werd de tijdrekening door paus Gregorius aangepast. Hij kortte het jaar 1582 een aantal dagen in zodat de lenteëvening in 1583 weer met 21 maart samenviel en bepaalde dat elke vier eeuwen drie schrikkeljaren moesten worden omgezet in gewone jaren. Deze tijdrekening wordt nog steeds gebruikt.

7 □ Toon aan dat de gemiddelde lengte van een kalenderjaar hierdoor zeer goed overeenkomt met de werkelijke jaarlengte.

De tijdsduur tussen twee opeenvolgende keren volle maan is 29,5306 dagen. In een zeker jaar valt Paaszondag op 5 april. Dit komt, omdat de eerste volle maan na 21 maart in dat jaar op vrijdag 3 april valt. Een gedeelte van de kalender van het jaar daarop staat hieronder.

tabel 2

	JANUARI					
ZONDAG		3	10	17	24	31
Maandag		4	11	18	25	
Dinsdag		5	12	19	26	
Woensdag		6	13	20	27	
Donderdag		7	14	21	28	
Vrijdag	1	8	15	22	29	
Zaterdag	2	9	16	23	30	

	FEBRUARI				
ZONDAG		7	14	21	28
Maandag	1	8	15	22	
Dinsdag	2	9	16	23	
Woensdag	3	10	17	24	
Donderdag	4	11	18	25	
Vrijdag	5	12	19	26	
Zaterdag	6	13	20	27	

	MAART				
ZONDAG		7	14	21	28
Maandag	1	8	15	22	29
Dinsdag	2	9	16	23	30
Woensdag	3	10	17	24	31
Donderdag	4	11	18	25	
Vrijdag	5	12	19	26	
Zaterdag	6	13	20	27	

	APRIL				
ZONDAG		4	11	18	25
Maandag		5	12	19	26
Dinsdag		6	13	20	27
Woensdag		7	14	21	28
Donderdag	1	8	15	22	29
Vrijdag	2	9	16	23	30
Zaterdag	3	10	17	24	

8 □ Bereken voor dat jaar de datum van Paaszondag.

De beroemde wiskundige Gauss (1777–1855) bedacht een methode om het aantal dagen (n) dat Paaszondag *ná* 21 maart valt, te berekenen aan de hand van het jaartal (x).

Hij gebruikte daarbij de restfunctie $r(a : b)$.
Voor alle positieve gehele getallen a en b geldt:
$r(a : b)$ is gelijk aan de rest die ontstaat als a gedeeld wordt door b.
Zo geldt bijvoorbeeld: $r(23 : 5) = 3$, want $23 = 4 \times 5 + 3$.
Evenzo $r(2000 : 19) = 5$, want $2000 = 105 \times 19 + 5$.

De rekenmethode van Gauss leidt voor de jaren in de periode 1982–2048 tot het volgende structuurschema:

structuur-schema

$x \leftarrow$ **invoer**
$y_1 \leftarrow 19 \cdot r(x : 19) + 24$ $y_2 \leftarrow r(y_1 : 30)$ $y_3 \leftarrow 6 \cdot y_2$ $y_4 \leftarrow 4 \cdot r(x : 7)$ $y_5 \leftarrow 2 \cdot r(x : 4)$ $y_6 \leftarrow r((y_3 + y_4 + y_5 + 5) : 7)$ $n \leftarrow y_2 + y_6 + 1$ **uitvoer** n
stop

9 □ Bereken op welke datum Paaszondag in het jaar 1996 valt.

Door de wisselende Paasdata is op scholen voor voortgezet onderwijs de indeling van het schooljaar ieder jaar verschillend.
Tijdens een rectorenvergadering opperen enige rectoren het idee om de paasvakantie te ontkoppelen van de paasdatum. Dat zou een evenwichtiger verdeling van het schooljaar mogelijk maken. Nogal wat aanwezigen blijken het een geweldig idee te vinden.
Om te onderzoeken of dit idee ook aanslaat bij de docenten in het voortgezet onderwijs, besluiten de rectoren uit deze groep docenten een aselecte steekproef te trekken van 100 personen en deze personen te vragen wat ze van het idee vinden.
Alleen als uit het onderzoek overtuigend blijkt dat meer dan 75% van de docenten in het voortgezet onderwijs het een goed idee vindt, zullen ze het idee uitwerken. Daarbij hanteren ze een significantieniveau van 5%.

10 □ Bereken hoeveel van de 100 docenten in de steekproef het een goed idee zullen moeten vinden, opdat de rectoren hun idee verder zullen uitwerken.

Opgave 3 Ratten

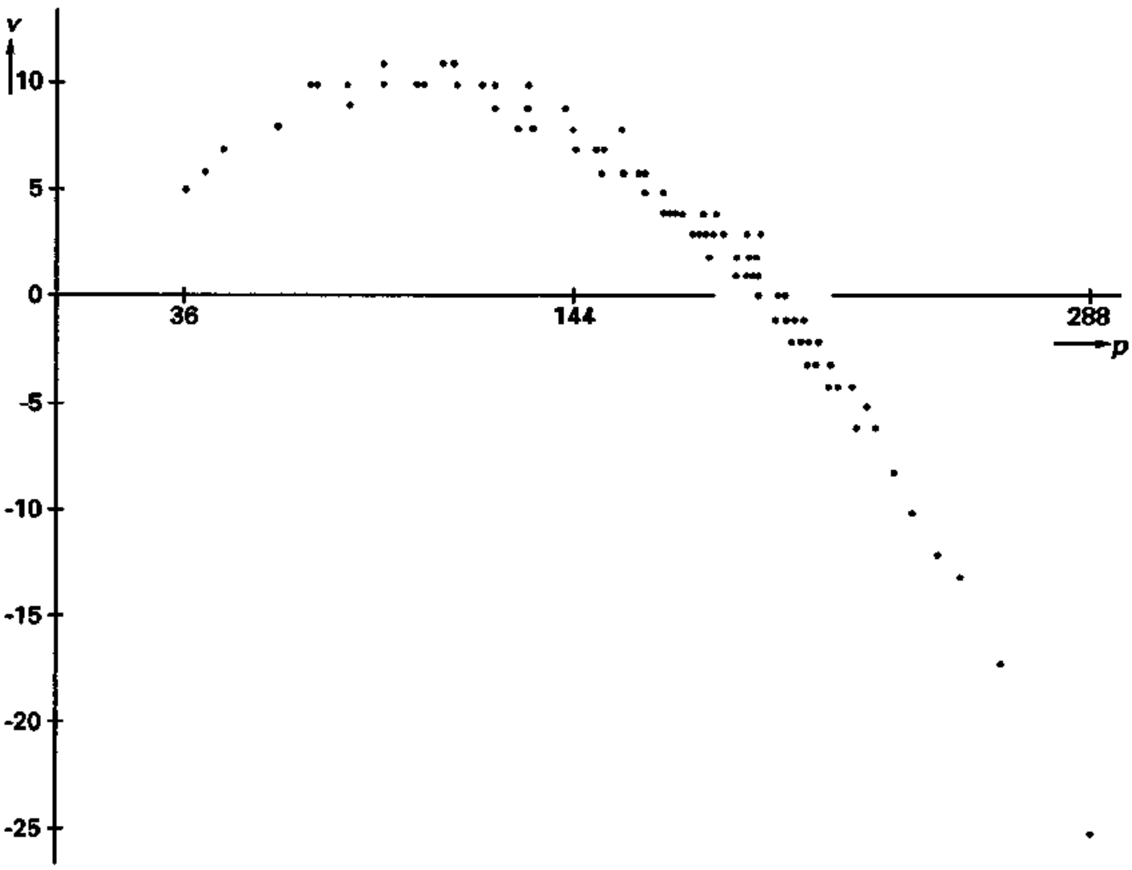
Bij groepen wilde Noorse ratten heeft de bioloog Fredynne onderzocht of de bevolkingsdichtheid invloed heeft op de wijze waarop de populatie-omvang verandert.
Acht groepen (A, B, ..., H) waren ondergebracht op afgescheiden gebieden met gelijke oppervlakten. De dieren hadden altijd voldoende voedsel en woonplaatsen. Ze hadden bovendien tijdens het gehele onderzoek geen last van natuurlijke vijanden. Maandelijks werd nagegaan hoeveel ratten elke groep telde. In tabel 3 zijn de resultaten van deze tellingen over een periode van twaalf maanden af te lezen. Uit deze tabel blijkt dat groep A, waar met slechts 36 ratten begonnen was, na een jaar 140 ratten telde.

tabel 3

Aantal maanden	A	B	C	D	E	F	G	H
0	36	72	108	144	180	216	252	288
1	41	82	119	152	183	212	239	263
2	47	91	129	159	186	209	229	246
3	54	101	137	165	189	208	223	234
4	62	111	145	171	190	206	217	226
5	71	122	152	175	192	205	213	221
6	81	132	158	179	193	203	210	216
7	91	142	164	182	194	202	208	213
8	102	151	169	184	195	202	206	211
9	112	158	174	188	196	202	204	208
10	122	164	178	190	196	202	203	207
11	131	170	181	193	196	201	202	205
12	140	174	185	195	197	201	202	203

11 ⊔ Toon aan dat groep A tijdens de eerste vijf maanden vrijwel exponentieel groeide.

figuur 2



Aan de hand van de gegevens van tabel 3 is figuur 2 getekend. In deze figuur is de verandering (v) van de populatie-omvang na één maand uitgezet tegen de populatie-omvang (p) *aan het begin van die maand.* Duidelijk herkenbaar is het punt (36, 5) afkomstig van groep A en het punt (288, −25), afkomstig van groep H.

Men kan de puntenwolk van figuur 2 redelijk goed benaderen door een parabool met vergelijking $v = ap^2 + bp + c$.
Neem hiervoor de parabool die gaat door (0, 0) en die (100, 11) als hoogste punt heeft.

12 □ Bereken a, b en c.

Neem bij het beantwoorden van de volgende vragen aan dat het verband tussen p en v in omstandigheden zoals die bij dit onderzoek gelden, beschreven wordt door de formule

$$v = 0{,}2p - 0{,}001p^2$$

Bij zijn onderzoek ontdekte Fredynne dat het aantal ratten dat in een maand overlijdt, ongeveer gelijk is aan 10% van het aantal (p) dat de betreffende populatie aan het begin van de maand telde.
Uitgaande van de veronderstelling dat er altijd evenveel mannetjes als wijfjes zijn, kan met de bovenstaande gegevens in het model onderzocht worden op welke wijze het gemiddelde aantal jongen per wijfje per maand van p afhangt.

Neem aan dat een populatie bij het begin van een maand 100 ratten telt.

13 □ Toon door berekening aan dat voor die maand het gemiddeld aantal jongen per wijfje ongeveer 0,4 zal zijn.

14 □ Bereken hoeveel ratten een populatie aan het begin van een maand moet tellen opdat het gemiddeld aantal jongen per wijfje voor die maand op ongeveer 0,1 uitkomt.

Opgave 4 Beveiliging

Een zekere bank wordt 's nachts intensief bewaakt. Meerdere malen per nacht doet één van de bewakers een ronde door het gebouw. Op zo'n ronde moet hij zich op vijftien plaatsen melden door een speciale code in te toetsen in een meldkastje. De computer in de controlekamer registreert de tijdstippen waarop dit gebeurt. Ook schrijft de procedure voor dat de tijdstippen van vertrek en terugkomst worden geregistreerd. De kastjes zijn zodanig op de route geplaatst dat de zestien loopafstanden vrijwel even lang zijn. Uit de overzichten over langere tijd blijkt dat, in het geval dat er niets bijzonders valt op te merken, de lengte van de tijdsintervallen tussen twee opeenvolgende meldingen van de bewaker redelijk normaal verdeeld is met een gemiddelde van 3,6 minuten en een standaarddeviatie van 0,7 minuten. In het geval dat een melding langer dan vijf minuten uitblijft, wordt een bewaker in de controlekamer automatisch gewaarschuwd dat er mogelijk iets aan de hand is.

De bewaker heeft zich zojuist gemeld bij het vijfde kastje.

15 ▫ Bereken in gehele procenten de kans dat onder normale omstandigheden de volgende melding langer dan 5,0 minuten uitblijft.

Veronderstel dat de lengtes van de 16 tijdsintervallen bij een ronde door het gebouw onder normale omstandigheden onafhankelijk van elkaar zijn.

16 ▫ Bereken in gehele procenten de kans dat onder normale omstandigheden de totale tijd van een ronde door het gebouw langer is dan 60,0 minuten.

Tijdens zo'n ronde kijkt de bewaker wel enige keren in de gang naar de kluis, maar hij gaat er niet in. In de gang naar de kluis is namelijk een alarminstallatie aangebracht die in directe verbinding staat met de meldkamer op het hoofdbureau van de politie. In het plafond zijn (onzichtbaar) vijf roterende sensoren aangebracht. 's Nachts gaat het alarm automatisch af zodra minstens één van deze sensoren geactiveerd wordt. De sensoren werken geheel onafhankelijk van elkaar. Voor elke sensor afzonderlijk geldt dat de kans op alarm (de detectiekans) in het geval dat iemand 's nachts de sensor passeert, gelijk is aan 0,45.

17 ▫ Toon met een berekening aan dat de kans dat het alarm bij de politie afgaat als iemand 's nachts de gehele gang aflegt, ongeveer gelijk is aan 95%.

De directie vindt deze kans te klein. Zij wil de sensorinstallatie zo laten verbeteren dat de kans op alarm als iemand 's nachts de gehele gang aflegt, groter is dan 99,5%.
Volgens de chef van de beveiliging kan dit op twee verschillende manieren bereikt worden.
1 Het aantal sensoren met een detectiekans van 0,45 wordt uitgebreid; per bij te plaatsen sensor kost dit *f* 8.000,–.
2 Een aantal van de aanwezige sensoren wordt ingeruild tegen een nieuw type met een detectiekans van 0,80; per in te ruilen sensor kost dit *f* 9.000,–.

18 ▫ Bereken hoeveel men minimaal moet uitgeven om de sensorinstallatie zodanig te verbeteren dat aan de wens van de directie wordt voldaan.