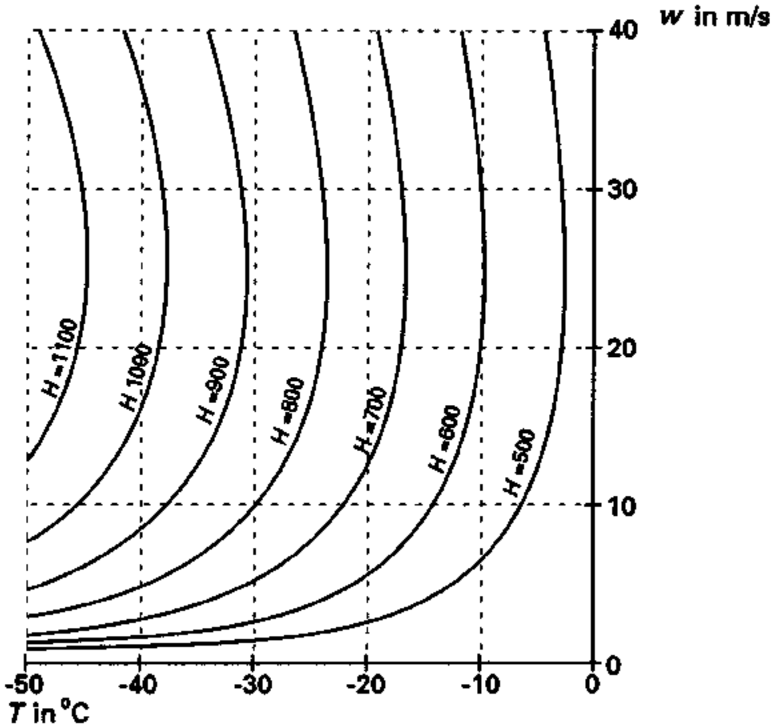
Opgave 1 Wind en kou

Als het gezicht van een mens bij strenge vorst ook nog aan harde wind wordt blootgesteld, kan bijzonder snel bevriezing optreden. De Amerikanen Siple en Passel behoorden rond 1940 tot de eerste wetenschappers die in Antarctica onderzoek deden naar het verband tussen het warmteverlies H van de huid, de windsnelheid w en de temperatuur T. Op grond van hun eerste metingen bij betrekkelijk lage windsnelheden stelden zij aanvankelijk een model op waarin het verband tussen H, w en T in Antarctica beschreven werd met de formule

$$H = (4{,}2 + 4\sqrt{w} - 0{,}4w) \cdot (33 - T)$$

Hierbij wordt w uitgedrukt in meters per seconde, T in graden Celsius en H in Joule per cm^2 onbedekte huid per uur.
Op grond van dit model is figuur 1 getekend; hierin is voor antarctische temperaturen ($T = -50$ tot $T = 0$) en windsnelheden tot 40 m/s een aantal iso-H-lijnen getekend.

figuur 1



Op een onderzoeksstation in Antarctica wordt het werken in de buitenlucht gestaakt als H de waarde 800 overschrijdt. Volgens figuur 1 is dat bijvoorbeeld het geval bij een temperatuur van -30° C en een windsnelheid van ongeveer 10 m/s.

1 □ Bereken met de formule in gehele graden nauwkeurig de laagste temperatuur waarbij nog in de buitenlucht gewerkt mag worden bij een windsnelheid van 15 m/s.

Uit figuur 1 volgt dat voor $T = -20$ de maximale waarde van H ligt tussen 700 en 800.

2 □ Bereken met behulp van differentiëren hoe groot de maximale waarde van H volgens dit model is bij deze waarde van T.

Omdat het aanvankelijke model van Siple en Passel niet voor alle weersomstandigheden klopt met de realiteit in Antarctica, was een bijstelling van het model nodig.
Bij verder experimenteren ontdekten ze dat het aanvankelijke model wel klopte zolang de windsnelheid niet groter was dan 20 m/s. Als de windsnelheid vanaf 20 m/s nog verder toenam, bleek H, mits de temperatuur gelijk bleef, niet meer te veranderen.
Met deze ontdekking stelden ze hun model bij.

3 □ Leg met een figuur uit hoe de iso-H-lijnen volgens het bijgestelde model moeten lopen. Kies daarbij de assen op dezelfde wijze als in figuur 1; het tekenen van een tweetal iso-H-lijnen is voldoende.

4 □ Stel een formule op waarmee H in het bijgestelde model berekend kan worden bij windsnelheden van 20 m/s en hoger.

Het onderzoek van Siple en Passel heeft er toe geleid dat 's winters in de Verenigde Staten bij het weerbericht behalve de temperatuur ook de zogenaamde 'windchill-factor' (F) wordt vermeld.
Bij $T = -5$ en $w = 10$ zou dan $F = -22$ als windchill-factor vermeld worden.
Een combinatie van een temperatuur van $-5°$ C en een windsnelheid van 10 m/s voelt namelijk 'even koud' aan als een temperatuur van $-22°$ C bij vrijwel windstil weer. Voor vrijwel windstil weer houdt men $w = 1{,}8$ aan. (Dit is de windsnelheid die een wandelaar ervaart bij windstil weer.)

Voor de berekening van F gaat men als volgt te werk:
- bij een gegeven temperatuur en windsnelheid berekent men volgens het bijgestelde model van Siple en Passel de bijbehorende waarde van H;
- daarna berekent men de fictieve temperatuur die in combinatie met $w = 1{,}8$ *dezelfde* waarde voor H oplevert;
- de windchill-factor F vindt men door de gevonden waarde van de fictieve temperatuur af te ronden op een geheel getal.

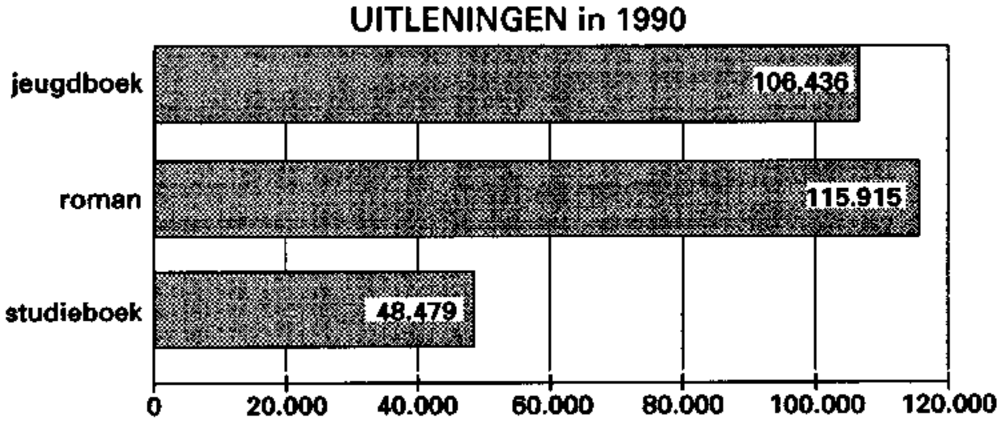
5 □ Bereken de windchill-factor voor een temperatuur van $-10°$ C en een windsnelheid van 16 m/s.

Opgave 2 Bibliotheek

Een gemeentebibliotheek koopt elk jaar nieuwe boeken. Hiervoor is voor 1992 een bedrag van *f* 105.000,– beschikbaar. In een vergadering van de hoofden van de drie afdelingen (jeugdboeken, romans, studieboeken) moet afgesproken worden hoe het bedrag over deze afdelingen zal worden verdeeld.

Mevrouw De Rooy, hoofd van de afdeling romans, stelt voor het bedrag van *f* 105.000,– te verdelen volgens de verhouding van de uitleencijfers in 1990. Deze uitleencijfers zijn in figuur 2 af te lezen.

figuur 2



6 ☐ Bereken in guldens nauwkeurig de bedragen die de afdelingen krijgen toegewezen als het voorstel van mevrouw De Rooy zou worden uitgevoerd.

Mevrouw Jansen, hoofd van de afdeling jeugdboeken, stelt voor, *in totaal* zoveel mogelijk nieuwe boeken aan te schaffen. Wel moet aan een aantal eisen voldaan zijn. Zij noemt:

1 de afdeling jeugdboeken en de afdeling romans moeten elk minstens 1200 boeken kunnen aanschaffen;
2 de afdeling studieboeken moet minstens 400 boeken kunnen aanschaffen;
3 de afdeling jeugdboeken krijgt niet meer geld dan de afdeling romans;
4 de afdeling jeugdboeken krijgt niet meer dan drie keer het bedrag van de afdeling studieboeken.

Bij het doorrekenen van haar voorstel gaat men van de volgende gemiddelde prijzen uit:
f 15,– voor een jeugdboek, *f* 24,– voor een roman en *f* 30,– voor een studieboek.
Verder stelt men de *bedragen* voor de afdelingen jeugdboeken, romans en studieboeken achtereenvolgens j, r en $105000-j-r$.
Uit de bovengenoemde eisen volgen vijf beperkende voorwaarden in j en r.

7 ☐ Stel deze vijf voorwaarden op en teken in een rechthoekig assenstelsel Ojr het gebied waarin aan deze voorwaarden wordt voldaan.

8 ☐ Bereken hoeveel boeken elke afdeling kan aanschaffen als het voorstel van mevrouw Jansen zou worden uitgevoerd.

Het hoofd van de afdeling studieboeken, mevrouw Smit, vindt bij elk van de bovengenoemde voorstellen het bedrag dat naar de jeugdafdeling gaat, veel te hoog. Zij wijst erop dat het jeugdlidmaatschap nog steeds gratis is, terwijl de contributie voor de volwassenen elk jaar hoger wordt. Vaak hoort zij de klacht: "De contributie wordt wel steeds hoger, maar nieuwe boeken worden nauwelijks gekocht." Zij denkt dat veel volwassenen om deze reden overwegen het lidmaatschap op te zeggen.
De anderen vinden deze uitspraak overdreven en schatten dat hoogstens 5% van de volwassen leden dit om deze reden overweegt. Mevrouw Smit beweert dat dit percentage hoger is.
Men besluit de bedragen nog niet vast te stellen maar eerst een enquête te houden om na te gaan of mevrouw Smit in het gelijk gesteld moet worden.

Voor de enquête worden 100 personen, die aselect uit het bestand van de volwassen leden zijn gekozen, ondervraagd.

9 ☐ Bereken hoeveel geënquêteerden die om de genoemde reden overwegen het lidmaatschap op te zeggen, men in de steekproef moet aantreffen opdat mevrouw Smit in het gelijk gesteld wordt bij een significantieniveau van 2,5%.

Opgave 3 Bezonning

Bij het ontwerpen van gebouwen besteedt men aandacht aan de mogelijke bezonning. Daarbij gaat men uit van een altijd wolkeloze hemel. In deze opgave beperken we ons tot gebouwen met rechte verticale gevels die niet in de schaduw staan van andere objecten. Verder gaan we uit van een jaar met 365 dagen. In tabel 1 is af te lezen hoeveel dagen elke kalendermaand telt.

tabel 1

maand	aantal dagen	maand	aantal dagen
januari	31	juli	31
februari	28	augustus	31
maart	31	september	30
april	30	oktober	31
mei	31	november	30
juni	30	december	31

In de figuur op de bijlage is het dagelijks aantal uren zonneschijn B bij een altijd wolkeloze hemel uitgezet tegen het nummer van de dag (n); hierbij geldt $n = 1$ voor 1 januari.
Overeenkomstig zijn het dagelijks aantal bezonningsuren voor een zuidwest-gevel (B_{zuidwest}) en dat voor een noord-gevel (B_{noord}) uitgezet.
Uit deze figuur blijkt dat een noord-gevel slechts een gedeelte van het jaar beschenen wordt.

Er geldt: $B = 12{,}3 + 4{,}6 \sin \frac{2\pi}{365}(n - 80) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots, 365)$.

Op 30 januari komt de zon op om 8 uur 27.

10 ☐ Bereken met behulp van de formule het tijdstip waarop de zon op 30 januari onder gaat in minuten nauwkeurig.

11 ☐ Toon door berekening aan dat 12 april de eerste dag van het jaar is dat de zon langer dan 14 uur schijnt.

Neem aan dat de punten van de grafiek van B_{zuidwest} op een sinusoïde liggen.

12 ☐ Stel een voorschrift op voor deze sinusoïde, met behulp van de figuur in de bijlage.

Gevels aan weerszijden van een rechthoekig gebouw kunnen niet tegelijkertijd door de zon beschenen worden.

13 ☐ Teken in de figuur van de bijlage de grafiek voor het dagelijks aantal bezonningsuren voor een zuid-gevel.

Opgave 4 Storing

Els is laborante op een bacteriologisch laboratorium. Zij moet vaak met behulp van een microscoop tellingen verrichten in een weefselkweek. Dat tellen moet zeer nauwkeurig gebeuren. Als Els door de telefoon of door een collega uit haar concentratie wordt gehaald, moet ze van voren af aan met tellen beginnen.

Voor het bestuderen van deze en overeenkomstige situaties stellen we binnen deze opgave een model op. Daarbij maken we twee veronderstellingen. Allereerst veronderstellen we:

(a) *Elke storing eindigt aan het eind van de minuut waarin hij begon.*

In figuur 3 is schematisch een situatie weergegeven waarin Els 13 minuten nodig had voor een telling die zonder storingen 5 minuten zou hebben geduurd. In de derde, vierde en achtste minuut trad een storing op. Aan het begin van de vierde, vijfde en negende minuut was Els dus weer van voren af aan begonnen. Alleen de laatste keer kon zij de telling zonder storingen voltooien.
De totale tijd tot het einde van de succesvolle telling noemen we de *totale teltijd* (T).

figuur 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
		s	s				s					

Het is voorgekomen dat de totale teltijd van Els uitkwam op 25 minuten voor een telling die zonder storingen 8 minuten zou hebben geduurd.

14 □ Hoeveel storingen heeft Els bij die telling minimaal gehad? Licht het antwoord toe.

Voor het model nemen we als tweede veronderstelling aan:

(b) *Voor elke minuut is de kans dat er geen storing optreedt gelijk aan 0,9.*
(Hierbij wordt aangenomen dat voor elke minuut het optreden van een storing onafhankelijk is van het optreden van storingen in voorgaande minuten.)

W is de verwachtingswaarde van het aantal minuten totale teltijd bij een telling die zonder storingen n minuten zou duren. In het model geldt de volgende formule voor W:

$W = 10(1{,}111^n - 1)$, waarbij $n = 1, 2, 3, \dots$

15 □ Bereken met deze formule de grootste waarde van n waarvoor deze verwachtingswaarde kleiner is dan 20.

We letten verder uitsluitend op tellingen die zonder storingen 8 minuten zouden duren (dus $n = 8$). Om een indruk te krijgen hoe groot de kansen op de verschillende waarden van de totale teltijd in de praktijk ongeveer zullen zijn, is een computersimulatie uitgevoerd. Omdat de totale teltijd in een enkel geval zelfs meer dan 50 minuten bedroeg, zijn de resultaten in klassen ingedeeld. In tabel 2 kunnen de klassen en de bijbehorende frequenties worden afgelezen.

tabel 2

totale teltijd in minuten	frequentie
8	842
9 tot en met 12	351
13 tot en met 16	346
17 tot en met 20	182
21 tot en met 28	192
29 tot en met 36	57
37 tot en met 52	27
53 tot en met 68	3
	2000

Met behulp van de gegevens van tabel 2 kan geschat worden hoe groot de gemiddelde totale teltijd van deze 2000 gevallen ongeveer geweest is.

16 □ Voer zo'n schatting uit, gebruik daarbij de klassemiddens; vermeld de klassemiddens en geef het antwoord in één decimaal nauwkeurig.

De kans op een totale teltijd van k minuten bij de gemaakte veronderstellingen noemen we $P(T = k)$, hierbij is $k = 8, 9, 10, \ldots$.
In tabel 2 zien we dat in 842 van de 2000 gevallen geldt $T = 8$.

De relatieve frequentie $\frac{842}{2000} = 0{,}421$ geeft een indicatie voor $P(T = 8)$.

17 □ Toon aan dat de werkelijke waarde van $P(T = 8)$ bij een nauwkeurigheid in drie decimalen gelijk is aan 0,430.

18 □ Bereken in drie decimalen nauwkeurig $P(T = 10)$.

De frequenties voor de klassen '9 tot en met 12' en '13 tot en met 16' bij de computersimulatie verschillen weinig. Op grond daarvan kan men vermoeden dat de kansen $P(9 \leqq T \leqq 12)$ en $P(13 \leqq T \leqq 16)$ ongeveer even groot zijn.

19 □ Beredeneer dat de kansen $P(T = 9)$, $P(T = 10)$, $P(T = 11)$, ... $P(T = 16)$ gelijk zijn.