Eindexamen wiskunde A vwo 1990-II

Opgave 1 Basketbal

Jeannet is aanvoerster van het eerste team van de basketbalvereniging FLITS. Dit team speelt met nog 9 andere teams een „hele competitie", dat wil zeggen dat elk van deze 10 teams twee wedstrijden tegen elk ander team speelt.
De teams die na deze competitie de bovenste vier plaatsen innemen, spelen daarna nog de „play-off-wedstrijden" om het kampioenschap. Ook dat gebeurt weer in de vorm van een hele competitie.
Neem aan dat er geen teams gelijk eindigen.

1 □ Hoeveel wedstrijden worden in totaal gespeeld?

Jeannet scoort bijzonder veel punten voor haar team. De kans dat zij scoort bij een schotpoging is elke keer 65%.

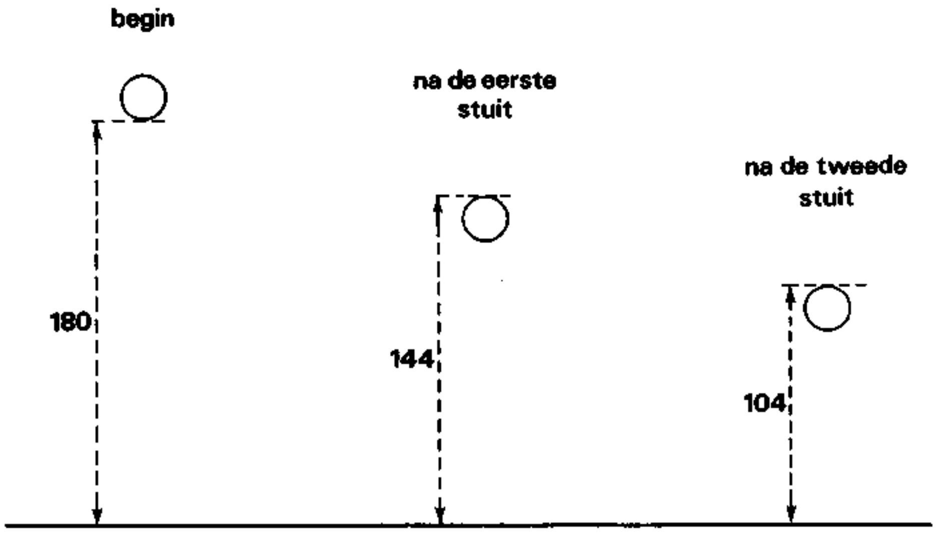
2 □ Bereken in procenten de kans dat ze bij ten hoogste 4 van de volgende 12 schotpogingen mist.

Zowel bij het dribbelen als bij het schieten is het belangrijk dat de bal goed opgepompt is.
Aan wedstrijdballen stelt de basketbalbond onder andere de volgende eis:

> *De bal moet met lucht zodanig opgepompt zijn dat, wanneer men hem van een hoogte van 180 cm, gemeten vanaf de onderzijde van de bal, laat vallen op een stevige houten vloer, hij opkomt tot een hoogte tussen 120 cm en 140 cm, gemeten vanaf de bovenzijde van de bal.*

Voorafgaand aan een belangrijke wedstrijd ontdekt de materiaalcommissaris van FLITS dat een zekere bal met een omtrek van 75,4 cm te hard opgepompt is. Wanneer hij de bal op de voorgeschreven manier laat vallen, stuit deze zo dat de *bovenkant* ervan een hoogte van 144 cm bereikt. Hij ontdekt verder dat indien hij de bal vrij laat stuiten, de bovenkant van de bal na de tweede keer stuiten een hoogte van 104 cm bereikt (zie figuur 1).

figuur 1



3 □ Toon aan dat de maximale hoogte die de onderzijde van de bal na beide keren stuiten bereikt, exponentieel afneemt. (De omtrek van een cirkel met straal r is gelijk aan $2\pi r$.)

Neem aan dat de materiaalcommissaris de bal ook verder vrij laat stuiten en dat het exponentieel afnemen ook voor de volgende keren stuiten geldt.

4 □ Bereken na hoeveel keer stuiten de bal voor het eerst geheel onder een hoogte van 25 cm blijft.

Jaarlijks controleert de materiaalcommissaris of de ballen van FLITS voldoen aan de overige eisen die de basketbalbond stelt.
Deze zijn:

De omtrek van de bal mag niet minder bedragen dan 75 cm en niet meer dan 78 cm. Het gewicht mag niet minder zijn dan 600 gram en niet meer dan 650 gram.

Bij zo'n controle komt hij tot de ontdekking dat het gewicht van de ballen klopt, maar dat de omtrek van 15 ballen niet in orde is. Omdat hierbij ook een aantal redelijk nieuwe ballen is, stelt hij zich in verbinding met de leverancier: het bedrijf BALFA. Dit bedrijf beweert dat het dagelijks 125 ballen produceert, waarvan de omtrek normaal verdeeld is met een gemiddelde van 76,5 cm en een standaarddeviatie van 0,70 cm.
Neem aan dat deze gegevens juist zijn.

5 □ Toon aan dat men kan verwachten dat 4 ballen in de dagproduktie niet voldoen aan de eisen die de bond stelt aan de omtrek.

6 □ Bereken in procenten de kans dat in een aselecte steekproef van 5 door BALFA gemaakte ballen, elke bal voldoet aan de eisen die de bond stelt aan de omtrek.

Op grond van de eigen gegevens beweert de verkoper van BALFA dat gemiddeld hoogstens één op de twintig ballen niet aan alle eisen van de bond voldoet. De materiaalcommissaris heeft zo zijn twijfels. Zij spreken met elkaar af de bewering van de verkoper te toetsen door middel van een aselecte steekproef van 15 stuks bij een significantieniveau van 5%.
Indien het resultaat de verkoper in het ongelijk stelt, krijgt FLITS de 15 nieuwe ballen uit de steekproef gratis.
X is het aantal ballen in de steekproef dat niet voldoet aan de eisen van de bond.

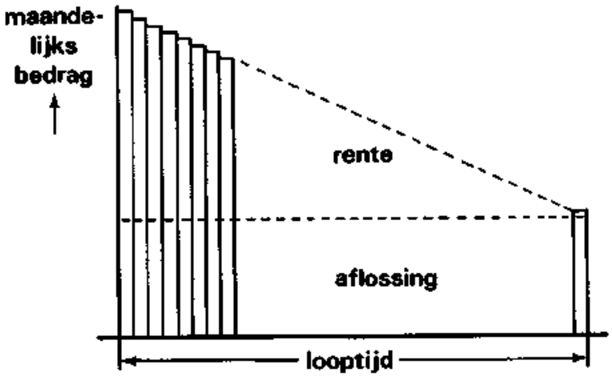
7 □ Bereken de kleinste waarde van X waarbij FLITS de ballen gratis krijgt.

Opgave 2 Hypotheek

Voor de aankoop van een huis wordt doorgaans geld geleend van een bank; het huis zelf dient als onderpand; op het huis rust dan een hypotheek. Er zijn verschillende hypotheekvormen. In deze opgave komen er twee aan de orde: de lineaire hypotheek en de annuïteitenhypotheek.
Bij beide vormen wordt in de hypotheekakte vastgelegd dat over een van te voren afgesproken periode (de looptijd) maandelijks een bedrag aan de bank betaald moet worden. Dit maandelijks bedrag kan uitgesplitst worden in een aflossings- en een rentedeel.
Aan het einde van de looptijd moet de totale lening zijn afgelost. Omdat de schuld elke maand minder wordt, neemt het rentedeel voortdurend af.

De lineaire hypotheek
Bij de lineaire hypotheek is het uitgangspunt dat het *aflossingsdeel* elke maand even groot is. Omdat het rentedeel elke maand minder wordt, is dat dus ook het geval voor het maandelijks bedrag; in figuur 2 is dit schematisch weergegeven.

figuur 2

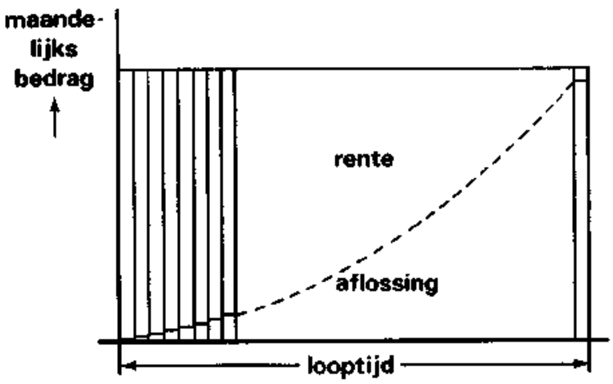


Mijnheer A sluit op 1 januari 1990 tegen een vaste rente van 0,7% per maand een lineaire hypotheek af voor een bedrag van *f* 90.000,–. De looptijd is 360 maanden.
De maandelijkse betalingen zullen steeds plaatsvinden op de eerste dag van de maand (te beginnen met 1 februari 1990).
De n^e betaling noemen we $B(n)$; $B(n)$ wordt gerekend in guldens.

8 ▫ Laat aan de hand van een berekening zien dat $B(1) = 880$.
9 ▫ Hoeveel zal in totaal afgelost zijn op 2 februari 1991?
10 ▫ Laat zien dat voor $B(n)$ geldt: $B(n) = 881{,}75 - 1{,}75n$.
11 ▫ Welk jaar zal het eerste kalenderjaar zijn waarin alle maandelijkse betalingen lager zijn dan 700 gulden?

De annuïteitenhypotheek
Bij de annuïteitenhypotheek zijn zowel het aflossingsdeel als het rentedeel variabel, het *maandelijks bedrag* (de annuïteit) is gedurende de hele looptijd elke maand even groot; in figuur 3 is dit schematisch weergegeven.

figuur 3



Mevrouw B sluit een annuïteitenhypotheek af voor een bedrag van f 90.000,– tegen een vaste rente van 0,7% per maand. Afgezien van de laatste maand zal zij elke maand een bedrag van f 800,– betalen.
We letten op de rij $S(0)$, $S(1)$, $S(2)$, $S(3)$, ... ; hierbij is $S(0) = f\,90.000,–$ en $S(n)$ de schuld van mevrouw B op het moment dat zij de n^{e} betaling heeft gedaan ($n = 1, 2, 3, \ldots$).
Uit $S(0)$ kan $S(1)$ op de volgende manier berekend worden:

$$\begin{array}{rcl} S(0) + \text{rente over de } 1^{\text{e}} \text{ maand} = 1{,}007 \cdot f\,90.000,– & = & f \quad 90.630,– \\ \text{mevrouw B betaalt:} & & f \quad\;\; 800,– \\ \hline \text{Dus schuld na haar } 1^{\text{e}} \text{ betaling} = S(1) & = & f \quad 89.830,– \end{array}$$

Uit $S(1)$ kan op overeenkomstige wijze $S(2)$ berekend worden, enzovoorts.

12 ☐ Toon aan dat $S(3) \approx f\,89.486,–$.

Voor het berekenen van $S(1)$, $S(2)$, $S(3)$, ... kan men ook gebruik maken van de matrix $W = \begin{pmatrix} 1{,}007 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

13 ☐ Toon aan dat $W^3 \cdot \begin{pmatrix} S(0) \\ -800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S(3) \\ -800 \end{pmatrix}$.

Zo zal voor het berekenen van bijvoorbeeld $S(5)$ gebruik gemaakt kunnen worden van W^5.
De machten van W hebben een speciale structuur. Om die structuur te herkennen, noemen we 1,007 voor het gemak g.

14 ☐ Toon aan: als $W = \begin{pmatrix} g & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dan $W^5 = \begin{pmatrix} g^5 & g^4 + g^3 + g^2 + g + 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

W^5 kan anders geschreven worden door gebruik te maken van de eigenschap:

$$g^4 + g^3 + g^2 + g + 1 = \frac{g^5 - 1}{g - 1}.$$

15 ☐ Verklaar deze eigenschap door het produkt $(g - 1)(g^4 + g^3 + g^2 + g + 1)$ uit te werken.

Nemen we in plaats van g weer 1,007 dan geldt voor $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$W^n = \begin{pmatrix} 1{,}007^n & \dfrac{1{,}007^n - 1}{0{,}007} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

16 ☐ Bereken $S(20)$ in guldens nauwkeurig.

Mevrouw C sluit tegen een vaste rente van 0,7% per maand een annuïteitenhypotheek af voor een bedrag van f 90.000,–. De looptijd is 360 maanden; alle maandelijkse betalingen zijn even groot.

17 ☐ Bereken in guldens nauwkeurig hoeveel zij maandelijks zal moeten betalen opdat aan het eind van de looptijd de gehele lening is afgelost.

Opgave 3 Vis

Om een goed beeld te krijgen van de ontwikkeling van de omvang van dierpopulaties wordt vaak gebruik gemaakt van wiskundige modellen. In die modellen probeert men de werkelijkheid zo nauwkeurig mogelijk door formules en continue functies te benaderen. Van belang daarbij is vaak niet alleen de populatieomvang (P) van een populatie, maar ook de *groeisnelheid* (G) waarmee de populatieomvang in de tijd (t) verandert.

Hierbij geldt $G = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$.

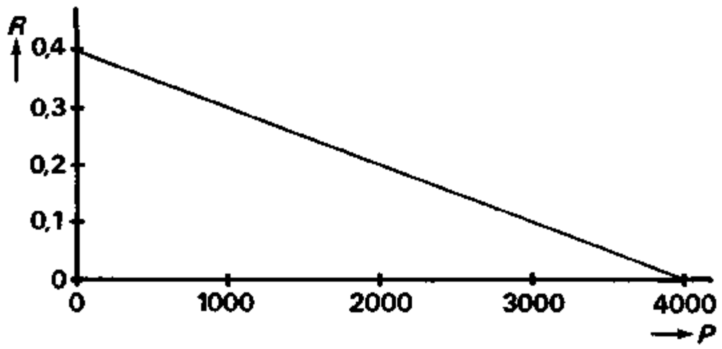
Ook kan worden gelet op de *relatieve groeisnelheid* (R), waarbij $R = \frac{G}{P}$.

De relatieve groeisnelheid is constant als P exponentieel toeneemt.

18 □ Laat zien dat deze bewering juist is voor een groeimodel waarbij geldt: $P = 85e^{0{,}12t}$.

Bij veel groeiprocessen in de natuur zijn er factoren aanwezig waardoor de relatieve groeisnelheid *afneemt* als de populatieomvang groter wordt. Een bioloog neemt dit als uitgangspunt bij het opstellen van een wiskundig model voor een viskwekerij.
De viskweker begint op een zekere dag met een nieuwe visvijver, waarin hij 160 vissen van één soort uitzet. Hierbij is de populatieomvang (P) het aantal vissen in de vijver, met $P = 160$ voor $t = 0$. De bioloog neemt in zijn model aan dat R een eerstegraads functie is van P. In figuur 4 is het verband tussen R en P grafisch weergegeven.

figuur 4



19 □ Bereken R voor $P = 2250$.

20 □ Welke betekenis heeft het aantal 4000 in dit model?

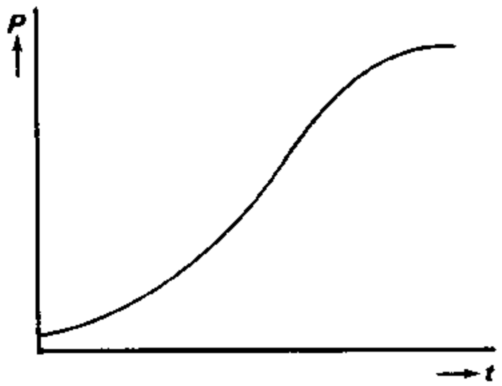
21 □ Toon aan dat $G = -0{,}0001P^2 + 0{,}4P$.

Indien er geen vissen worden gevangen, leidt de veronderstelling van de bioloog tot de formule

$$P = \frac{4000}{1 + 24e^{-0{,}4t}}.$$

Hierbij is t de tijd, in maanden gerekend, vanaf de dag dat de 160 vissen zijn uitgezet. Het verband tussen P en t is in figuur 5 weergegeven.

figuur 5



De viskweker wil wachten met het vangen van vissen tot de groeisnelheid (G) maximaal is.

22 □ Bereken hoeveel maanden de viskweker volgens dit model moet wachten met het vangen van vissen.